Colle du 10 octobre: Séries positives, réelles ou complexes

5.1 Première série

Exercice 1: Étudier la nature de la série $\sin(\pi(n^3 + n^\alpha)^{1/3})$, où $\alpha < 2$.

Exercice 2: Trouver toutes les fonctions continues $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in [0, 1], f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

Exercice 3: Soit (z_n) une suite de $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $d > 0$ tel que pour tous $p \neq q$ de $\mathbb{N}$, $|z_p - z_q| > d$. Soit $a > 2$. Montrer que $\sum \frac{1}{|z_n|^a}$ converge. Que se passe-t-il si $a = 2$?

Exercice 4: Soit $\sum x_n$ une série absolument convergente. On suppose que $\forall q \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{+\infty} x_{qn} = 0$. A-t-on nécessairement $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = 0$?

5.2 Deuxième série

Exercice 1: Quelle est la nature de la série $\sum \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$?

Exercice 2: Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des séries convergentes à termes réels. Existe-t-il une série divergente à termes réels non nuls $\sum b_n$ telle que:

$$\inf_{(a_n)\in\mathcal{C}} \sup_{n\geq 0} \mid 1 - \frac{a_n}{b_n} \mid = 0$$

Exercice 3:
1. Soient $z_1, ..., z_n$ des complexes de module inférieur ou égal à 1. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que pour tout p entre 1 et n, on a $|\varepsilon_1 z_1 + ... + \varepsilon_n z_n| \leq \sqrt{3}$.
2. Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite de complexes tendant vers 0. Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\{-1, 1\}$ telle que $\sum \varepsilon_n z_n$ converge.

5.3 Troisième série

Exercice 1: Donner la nature de la série $\sum (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Exercice 2: *(Théorème de Carathéodory et construction de la mesure de Lebesgue)*
Soit E un ensemble. Soit $\mu^* : \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$ telle que: $\mu^*(\emptyset) = 0$; si $A \subseteq B$, alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (propriété de croissance); pour toute suite $(A_k) \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$, on a $\mu^*(\bigcup A_k) \leq \sum \mu^*(A_k)$ (propriété de sous-additivité). On dit que μ^* est une mesure extérieure. On dit que $B \in \mathcal{P}(E)$ est μ^*-mesurable si pour toute partie A de E on a $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$. On note $\mathcal{M}(\mu^*)$ l'ensemble des parties μ^*-mesurables.
1. Montrer que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu, c'est-à-dire que: $E \in \mathcal{M}(\mu^*)$; si $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$, alors $A^c \in \mathcal{M}(\mu^*)$; si $A_n \in \mathcal{M}(\mu^*)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup A_n \in \mathcal{M}(\mu^*)$.
2. Montrer que la restriction de μ^* à $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une mesure, c'est-à-dire que: pour toute famille $(A_n) \in \mathcal{M}(\mu^*)^{\mathbb{N}}$ avec les A_n deux à deux disjoints, on a $\mu^*(\bigcup A_n) = \sum \mu^*(A_n)$.
Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on définit $\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i - a_i) : A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}]a_i, b_i[\right\}$.
3. Montrer que, pour $a \leq b$, $\lambda^*([a, b]) = \lambda^*(]a, b[) = b - a$.
4. Montrer que λ^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que la tribu $\mathcal{M}(\lambda^*)$ contient les ouverts de $\mathbb{R}$. On dit qu'elle contient la tribu borélienne (plus petite tribu contenant les ouverts).
La mesure $\lambda^* \mid_{\mathcal{M}(\lambda^*)}$ est appelée mesure de Lebesgue.